Alberto Mura

TEOREMA DI BAYES E VALUTAZIONE DELLA PROVA

1. *Introduzione*

La riflessione epistemologica contemporanea ha ampiamente messo in luce come l'identificazione della conoscenza con la certezza (cioè con la garanzia razionale della verità), che è un tratto caratteristico del pensiero occidentale sin dai tempi di Platone, è in realtà un mito ([1]). L'emergere della consapevolezza di ciò ha rivoluzionato la metodologia della scienza, persino in quei campi privilegiati che la tradizione amava chiamare "scienze esatte".

Il diritto delle prove, cresciuto all'ombra del mito della certezza, non può essere considerato immune dalla rivoluzione metodologica contemporanea. La prima conseguenza che se ne deve trarre è quella di ammettere che il giudizio di merito consiste *inevitabilmente* in una decisione in condizioni d'incertezza. Il processo, in questa visione, va visto come uno strumento atto a consentire al giudice di raggiungere, grazie all'acquisizione delle prove e alla loro discussione critica nella dialettica delle parti,

([1]) La letteratura su questo tema è sterminata. Mi limito a menzionare F. BARONE, *L'uomo e il mito della certezza*, in *Critica storica*, IX, 1972, e il volume *Il mondo incerto*, a cura di M. PERA, Roma-Bari,1994.

un convincimento che, dovendo rinunciare alla certezza piena, persegua il più modesto obiettivo di un'elevata probabilità.

Stando così le cose, non si può più considerare la logica *deduttiva*, modellata sulle forme della dimostrazione matematica, come quella più adeguata al ragionamento probatorio. Il diritto delle prove ha invece bisogno di una *logica dell'incertezza*. Quest'ultima è fornita dalla logica *probabilistica* e specialmente da quello schema di inferenza noto come *teorema di Bayes* ([2]). Cercherò dapprima di illustrare la rilevanza di quest'ultimo con l'aiuto di un semplice esempio, riservandomi di ritornarvi più avanti in termini più esatti e approfonditi.

2. *Cosa dice il teorema di Bayes?*

Supponiamo che nel corso di un processo per omicidio sia stato accertato che sull'arma del delitto sono presenti le impronte digitali dell'imputato *X*. Supponiamo inoltre che il pubblico ministero ritenga che questa risultanza fattuale (che chiamerò *f*) avvalori l'ipotesi accusatoria *h*, secondo la quale *X* è l'autore materiale del delitto. La tesi dell'accusa si basa, naturalmente, magari in maniera non esplicita, sulle due premesse seguenti: (a) se *X* fosse l'esecutore materiale del delitto avrebbe *probabilmente* lasciato impresse le sue impronte digitali sull'arma usata per commetterlo e (b) se *X* non fosse l'autore materiale dell'omicidio *probabilmente* non avrebbe lasciato le sue impronte sull'arma del delitto. Domandiamoci ora: qual è lo schema logico d'inferenza in virtù del quale, dalle premesse (a) e (b), si può concludere che la risultanza *f* avvalora l'ipotesi *h*? La risposta è, come cercherò di spiegare, che si tratta esattamente del teorema di Bayes.

([2]) Questo risultato è così chiamato perché dovuto al teologo e matematico inglese Thomas Bayes (1702-1761) che per primo, in un articolo pubblicato postumo (T. BAYES, *Saggio sulla soluzione di un problema della dottrina delle chances* (1763), trad. it., in *Sulla probabilità*, a cura di P. Garbolino, Ferrara, 1994), basandosi su di esso, fece uso induttivo della probabilità.

Secondo il teorema di Bayes, per valutare se e quanto *f* sia rilevante ([3]) rispetto a *h si deve* fare un triplice sforzo d'immaginazione: si deve in primo luogo *immaginare* di non possedere ancora *f*; in secondo luogo si deve *invertire la direzione* dell'inferenza che va da *f* a *h* e, ponendosi dal punto di vista dell'inferenza che va da *h* a *f*, chiedere a sé stessi con quale probabilità ci si dovrebbe aspettare *f* supponendo che *h* sia vera (nel nostro esempio, la risposta del pubblico ministero è, conformemente alla premessa (a), che se *X* fosse l'autore materiale del delitto sarebbe assai probabile che *X* avesse lasciato le sue impronte sull'arma del delitto); in terzo luogo ci si deve *chiedere* con quale probabilità ci si dovrebbe aspettare *f* supponendo che *h* sia falsa (nel nostro esempio, conformemente alla premessa (b), la risposta del pubblico ministero è che se *X* non fosse l'autore materiale del delitto sarebbe improbabile trovare le sue impronte sull'arma). Dopo tale attività immaginativa, si deve fare una *comparazione* di questi due valori di probabilità. Tale comparazione consente di stabilire se, nella situazione attuale, *f* è giudicata rilevante per *h* ed anche, in tal caso, se si ritiene che essa avvalori *h* o invece indebolisca *h*. Più esattamente: se *f* fosse giudicata *egualmente* probabile supponendo che *h* sia vera così come supponendo che *h* sia falsa, allora *f* sarebbe *irrilevante* per *h*: se, infatti, dovessimo attenderci le impronte di *X* sull'arma del delitto con la medesima probabilità sia nel caso in cui *X* fosse l'autore materiale del delitto sia nel caso in cui non lo fosse, quelle impronte non avrebbero alcun valore probatorio rispetto all'ipotesi accusatoria; se invece *f* fosse ritenuta, supponendo che *h* sia vera, *più* probabile di quanto non sarebbe ritenuta probabile supponendo che *h* sia falsa, allora si riterrebbe che *f* avvalori *h*; se infine *f* fosse giudicata *meno* probabile supponendo che

---

([3]) Uso qui la parola 'rilevante' nel significato di solito attribuitole nella letteratura probabilistica. In ambito giuridico il termine 'concludente' sarebbe più appropriato (cfr. G. UBERTIS, *La prova penale. Profili giuridici ed epistemologici*, Torino, 1995, p. 58 e 77 ss.).

h sia vera di quanto non fosse giudicata probabile supponendo che *h* sia falsa, allora si riterrebbe che *f* indebolisca *h*.

Torniamo al nostro esempio ipotetico. Il pubblico ministero ritiene che, sotto la supposizione che *X* sia l'autore materiale del delitto, la presenza delle impronte sull'arma sarebbe più probabile di quanto non lo sarebbe sotto la supposizione che *X* non sia l'autore materiale del delitto. Il pubblico ministero, quindi, *tornando alla direzione dell'inferenza che va da* f *a* h, conclude che il rinvenimento delle impronte di *X* sull'arma avvalori l'ipotesi *h*. Si può quindi sostenere che alla base di questa argomentazione, e della sua intuitiva cogenza, ci sia il teorema di Bayes. Non sorprende quindi che sia fiorita (soprattutto negli Stati Uniti) una scuola giuridica, chiamata *bayesianesimo*, la quale sostiene che ogni inferenza probatoria si fonda essenzialmente (magari in maniera inconsapevole) sul teorema di Bayes e ricalca quindi lo schema che abbiamo esposto ([4]).

3. *La probabilità come logica dell'incertezza*

Si è già accennato, sia pure in maniera del tutto informale, a un aspetto importante del teorema di Bayes. Vediamo ora di presentare questo risultato in termini più esatti. È però necessario fornire dapprima qualche precisazione sul suo uso nell'ambito del diritto delle prove.

La prima cosa da osservare è che il teorema di Bayes è appunto un *teorema* in quanto discende direttamente dagli assiomi generali della teoria della probabilità. Tali assiomi possono essere intesi, così come i teoremi che da essi derivano, come *leggi di non contraddittorietà per i gradi di credibilità*. In questo senso la teoria della probabilità, costituita dall'insieme di tutte le leggi generali della probabilità, può essere considerata come una generalizzazione della logica deduttiva, la quale *vieta* solo insiemi

([4]) Per un'ampia disamina delle virtù e delle difficoltà del bayesianesimo probatorio, rimando al volume *L'inferenza probabilistica nel diritto delle prove. Usi e limiti del bayesianesimo* (1988), a cura di P. TILLERS–E. GREEN, trad. it., Milano, 2003.

di asserzioni che si contraddicono vicendevolmente (5). E così come le regole della logica deduttiva non consentono di derivare nessuna proposizione che abbia un contenuto informativo se non a partire da premesse date, allo stesso modo le leggi della probabilità, senza premesse aggiuntive (di merito), non consentono di derivare valori numerici di probabilità per proposizioni che non siano tautologie o contraddizioni. Anche i calcoli classici, con i quali si deduce, per esempio, che la probabilità che si presenti un doppio sei lanciando due dadi è $1/36$, utilizzano i teoremi della teoria come *regole logiche d'inferenza*, e richiedono premesse *di merito* per essere derivati (nel caso specifico (a) che ogni faccia di ambo i dadi abbia la stessa probabilità di presentarsi in un singolo lancio e (b) che i risultati che riguardano uno dei due dadi siano — in senso probabilistico — indipendenti da quelli che riguardano l'altro dado). Con premesse aggiuntive diverse ma altrettanto non contraddittorie si trarrebbero conclusioni differenti. Se, per esempio, si avesse il sospetto che i dadi fossero "truccati", si potrebbe attribuire probabilità ¼ al presentarsi della faccia 6 del primo dado e probabilità ¾ al presentarsi della faccia 6 del secondo dado. In tal caso, mantenendo invariata la premessa (b), la probabilità di ottenere un doppio sei sarebbe pari a $3/16$.

Ciò che la teoria esclude sono solo le valutazioni di probabilità (cioè di credibilità) *contraddittorie*. Per fare un esempio semplice ma significativo, è contraddittorio ritenere che la probabilità che A sia l'autore del delitto sia 0,8 e, allo stesso tempo, che la probabilità che A non sia l'autore del delitto sia 0,7. Que-

---

(5) Questa caratterizzazione della teoria si deve ai cosiddetti *personalisti bayesiani*, in primo luogo a F. P. Ramsey (F. P. RAMSEY, *Verità e probabilità* (1926), trad. it., in ID. *I fondamenti della matematica e altri scritti di logica*, Milano, 1964) e B. de Finetti (B. DE FINETTI, *Sul significato soggettivo della probabilità*, in *Fundamenta Mathematicae*, 17, 1931, p. 298–329). L'accettazione di questo aspetto degli assiomi generali della probabilità non richiede tuttavia la stretta adesione alle idee di questi autori.

ste due valutazioni, prese insieme, non sono compatibili con le regole della teoria della probabilità. Una di queste regole dice infatti non si può attribuire probabilità maggiore di ½ a una proposizione *p* e, allo stesso tempo, alla sua contraddittoria non-*p*. Ciò, in fondo, non è che una generalizzazione ai gradi di credibilità dello stesso principio logico di non contraddizione, il quale applicato alla piena credibilità (certezza) stabilisce che non si può pienamente credere contemporaneamente alla verità di *p* e a quella di non-*p*. *Tutte* le leggi fondamentali della probabilità hanno il medesimo carattere: esse costituiscono un'estensione della logica deduttiva ai gradi di credibilità. Il teorema di Bayes non fa eccezione. Esso è infatti una conseguenza logica degli assiomi della teoria della probabilità. Violarlo non significa avere delle opinioni di merito errate, bensì essere portatori di valutazioni di credibilità che si contraddicono tra di loro.

La natura logica del teorema di Bayes reca con sé una conseguenza importante: la modificazione delle probabilità che esso impone in seguito all'acquisizione di nuove prove non va vista come una *correzione* dei gradi di credibilità attribuiti in precedenza, bensì come una *conseguenza* di essi in congiunzione con la nuova informazione ricevuta ([6]). Qui emerge però una fondamentale differenza tra la logica deduttiva e la logica della probabilità, che va sempre tenuta presente.

Quando si passa dalla certezza ai gradi di credibilità, infatti, si perde una proprietà fondamentale: la cosiddetta *monotonia*. Se un insieme di proposizioni *M* implica logicamente una proposizione *p*, l'aggiunta a *M* di altre premesse — sì da dar luogo a un nuovo insieme *M′* di premesse — conserva il rapporto d'implicazione logica: *p* è conseguenza logica anche di *M′*. Se *M* è un insieme di prove considerate accertate, possiamo considerare la deduzione di *p* da *M* come una prova logica della verità di *p*. In tal modo *p* può essere considerata una proposizione definitivamente accertata, in quanto la sua deducibilità non può venir

([6]) Cfr. B. DE FINETTI, *Teoria della probabilità*, Torino, 1970, p. 244–5.

meno con l'aggiunta di nuove prove al complesso delle prove acquisite ([7]).

Passando alla logica della probabilità le cose, sotto questo profilo, cambiano radicalmente. Se l'insieme di prove M rende altamente probabile la proposizione p, non è detto che l'aggiunta a M di nuove prove conservi l'alta probabilità di p. L'aggiunta di nuove premesse, sì da dar luogo a un nuovo insieme di premesse M', può anche far scendere la probabilità di *p senza con ciò contraddire alcuna delle premesse ammesse in precedenza*. Non è quindi lecito fissare una soglia molto alta di probabilità (per esempio 0,99 o anche 0,999) e considerare una proposizione che avesse, sulla base delle prove disponibili, quella probabilità (o una ancor maggiore) come "in pratica accertata".

4. *La formulazione del teorema di Bayes*

Non cambia nulla nella sostanza se per misurare la credibilità usiamo per comodità (come meglio specificato *infra*, nota 9), alla maniera degli scommettitori, la scala delle quote *(odds)*, anziché quella ordinaria della probabilità. In tal caso, anziché considerare come espressione del grado di credibilità in una proposizione A la probabilità $\mathbf{P}(A)$, consideriamo la trasformata $\mathbf{Q}(A)$ ottenibile dividendo $\mathbf{P}(A)$ per $1-\mathbf{P}(A)$ (purché $\mathbf{P}(A) < 1$), secondo la formula:

$$\mathbf{Q}(A) = \frac{\mathbf{P}(A)}{1-\mathbf{P}(A)}. \tag{1}$$

Osserviamo che la quota cresce con la probabilità (e viceversa) ([8]). Denotiamo con $\mathbf{Q}(H)$ la quota *iniziale* della proposi-

---

([7]) Qui per "definitivamente" non intendo "infallibilmente". Mi riferisco piuttosto al fatto che l'accertamento di p non può essere annullato da nessuna nuova prova logicamente compatibile con le prove acquisite.

([8]) In altri termini: le due quantità esprimono la stessa grandezza, sebbene mediante scale diverse. E così come mediante l'equazione (1) si può passare dalla scala della probabilità a quella delle quote è possibile fare la trasformazione H (cioè la quota di H prima dell'acquisizione di una prova E), con $\mathbf{Q}(H \mid E)$ la quota *finale* di H (cioè la quota di H dopo l'acquisizione di E), con $\mathbf{P}(E \mid H)$ la cosiddetta "probabilità inversa" — cioè la probabilità della prova prima della sua acquisizione sotto l'ipotesi che H sia vera — e con $\mathbf{P}(E \mid \text{non } H)$ la probabilità di E (sempre prima della sua acquisizione) sotto l'ipotesi che H sia falsa. *Il teorema di Bayes* afferma che il passaggio dalla quota iniziale alla quota finale dipende da questi tre elementi secondo la seguente formula:

(2) $$\mathbf{Q}(H \mid E) = \mathbf{Q}(H)\frac{\mathbf{P}(E \mid H)}{\mathbf{P}(E \mid \text{non } H)}.$$

La quantità $\mathbf{P}(E \mid H)/\mathbf{P}(E \mid \text{non } H)$ si chiama *rapporto di Bayes di* H *rispetto a* E — o anche, nei contesti statistici, *rapporto di verosimiglianza* (*likelihood ratio*) *di* H *rispetto a* E.

L'equazione (2) mostra come il rapporto di Bayes $\mathbf{P}(E \mid H)/\mathbf{P}(E \mid \text{non } H)$ determini completamente la natura dell'inferenza. Esso, infatti, costituisce il coefficiente per il quale deve essere moltiplicata la quota iniziale per ottenere la quota finale. Ne consegue che se $\mathbf{P}(E \mid H)/\mathbf{P}(E \mid \text{non } H)$ è maggiore di 1, la quota finale $\mathbf{Q}(H \mid E)$ è maggiore della quota iniziale $\mathbf{Q}(H)$ (e quindi anche la probabilità finale $\mathbf{P}(H \mid E)$ è maggio-

---

zione inversa, convertendo le quote in valori di probabilità attraverso la formula seguente:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathbf{Q}(A)}{\mathbf{Q}(A)+1}.$$

Questa equazione consegue dall'equazione (1) mediante semplici passaggi algebrici. Infatti dall'equazione (1) segue subito $\mathbf{Q}(A)(1-\mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(A)$; $\mathbf{Q}(A) - \mathbf{Q}(A)\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A)$; $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{Q}(A)\mathbf{P}(A)$; $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{P}(A)(1+\mathbf{Q}(A))$ da cui si deduce immediatamente $\mathbf{P}(A) = \mathbf{Q}(A)/(\mathbf{Q}(A)+1)$.

re della probabilità iniziale $\mathbf{P}(H)$ (9)), sì che, in tal caso, si ritiene che l'ipotesi H sia *sostenuta* da E. Se invece $\mathbf{P}(E \mid H) / \mathbf{P}(E \mid \text{non } H)$ è pari a 1, sia la quota sia la probabilità finale sono rispettivamente uguali alla quota e alla probabilità iniziale: in tal caso E è ritenuta *probabilisticamente irrilevante* per H. Infine, se $\mathbf{P}(E \mid H) / \mathbf{P}(E \mid \text{non } H)$ è minore di 1, sia $\mathbf{Q}(H \mid E)$ sia $\mathbf{P}(H \mid E)$ sono minori rispettivamente di $\mathbf{Q}(H)$ e di $\mathbf{P}(H)$: in questo caso H è ritenuta *indebolita* da E.

Sostenere che il teorema di Bayes è all'opera ogni volta che si deve valutare una nuova prova, significa essenzialmente che l'utilizzo della formula (2) — o altra equivalente — può essere iterato.

Ad ogni iterazione, quella che nell'inferenza precedente era la quota finale, diviene la quota iniziale, che, moltiplicata per il rapporto di Bayes relativo alla nuova prova, dà luogo ad una nuova probabilità finale, e così via. Il *ciclo* inferenziale bayesiano può così ripetersi indefinitamente.

Più in dettaglio, date n prove $E_1, E_2, \ldots, E_n$, vale l'equazione:

---

(9) La formula corrispondente alla (2) per la probabilità $\mathbf{P}(H \mid E)$ anziché per la quota $\mathbf{Q}(H \mid E)$ è la seguente:

$$(2') \qquad \mathbf{P}(H \mid E) = \frac{\mathbf{P}(H)\,\mathbf{P}(E \mid H) / \mathbf{P}(E \mid \text{non } H)}{1 - \mathbf{P}(H) + \mathbf{P}(H)\,\mathbf{P}(E \mid H) / \mathbf{P}(E \mid \text{non } H)}\,.$$

Il lettore che lo desideri può verificare direttamente quanto asserito nel testo rispetto a $\mathbf{P}(H \mid E)$ utilizzando la formula (2′) in luogo della (2). Va però ripetuto che la (2) — la quale è preferibile alla (2′) perché più semplice — è sufficiente per inferire il segno dell'incremento della probabilità finale: se aumenta (oppure diminuisce oppure rimane invariata) la quota, allora aumenta (rispettivamente: diminuisce, rimane invariata) anche la probabilità. Le due grandezze, infatti, esprimono in fondo la stessa cosa e il passaggio dall'una all'altra corrisponde a un mero cambiamento di scala.

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned}&\mathbf{Q}(H \mid E_1 \text{ e} \ldots \text{e } E_n) = \\ &\mathbf{Q}(H \mid E_1 \text{ e} \ldots \text{e } E_{n-1}) \frac{\mathbf{P}\left(E_n \mid H \text{ e } E_1 \text{ e} \ldots \text{e } E_{n-1}\right)}{\mathbf{P}\left(E_n \mid \text{non } H \text{ e } E_1 \text{ e} \ldots \text{e } E_{n-1}\right)}.\end{aligned}$$

La versione (3) del teorema di Bayes rende chiaro in che modo si può fare di esso un uso iterativo. La prima volta si applica la formula (2), le volte successive si applica ripetutamente la formula (3) attribuendo a n di volta in volta il valore 2, il valore 3 etc, sino ad arrivare al valore n ([10]).

L'equazione (3) è però solo in apparenza più generale della (2). In realtà entrambe le formule sono equivalenti se si considera che le n prove, per quanto disparate esse siano sotto il profilo del loro contenuto, dal punto di vista *formale* possono essere condensate (mediante l'operazione logica 'e') in un'unica proposizione o ridotte a due o a quante si voglia m prove e che il teorema di Bayes ha carattere puramente formale. Ciò reca con sé un'importante conseguenza: è perfettamente equivalente valutare le prove tutte in una volta applicando la formula (2) oppure seguire la via sequenziale, aggiornando mediante la formula (3) la valutazione della probabilità man mano che si acquisiscono nuove prove singole o raggruppate nella maniera che riesce più conveniente. Se si seguono le leggi della probabilità, tutte queste valutazioni sono alla fine numericamente identiche.

([10]) A rigore si può interpretare la formula (3) in modo tale che essa includa la formula (2) come caso particolare. In tal caso l'iterazione partirebbe da $n=1$. Basta riscrivere $\mathbf{P}(h)$ come $\mathbf{P}(H \mid E_0)$ e convenire che E_1 e … e E_{n-1} sia uguale a E_0 quando $n=1$, essendo E_0 una proposizione tautologica (come «piove o non piove») che funge da "prova nulla". Dal punto di vista formale questa operazione è perfettamente legittima. E_0 svolge qui un ruolo analogo a quello svolto dallo 0 nella teoria dei numeri cardinali. Quando la totalità delle prove è E_0, allora l'insieme delle prove acquisite è vuoto (non contiene alcuna prova).

Questa meravigliosa proprietà, per la quale una singola formula contiene ad un tempo il criterio formale di valutazione delle singole prove e quello della loro *combinazione* è una virtù che nessun'altra teoria formale — tra quelle sinora proposte — possiede. Al contrario, non appena si tenta di deviare dalla formula di Bayes mediante formalismi alternativi, si va incontro inevitabilmente a un'intricata casistica di regole ed eccezioni *ad hoc* onde (come è ovviamente indispensabile) non far dipendere la valutazione delle prove dall'ordine con cui le si considerano o da accidentalità del linguaggio.

5. *I diversi usi del teorema di Bayes nel diritto delle prove*

Il teorema di Bayes va visto come uno schema logico d'inferenza. Come tale esso ha una natura completamente formale. Questa considerazione dovrebbe mettere in guardia da una possibile fallacia: quella di ritenere che esso possa, quasi per magia, essere la fonte di valutazioni di merito. In realtà, come tutti gli schemi d'inferenza, attraverso di esso non si fa altro che rendere esplicito quel che è già implicito nelle premesse. Alla luce di queste considerazioni gli usi del teorema di Bayes, e più in generale della logica della probabilità, sono analoghi a quelli della logica deduttiva applicata alla credibilità. Senza la pretesa di elencarli tutti, i principali usi sono i seguenti:

a) *uso delucidativo*. La dottrina delle prove si avvale di un ampio patrimonio di concetti specifici, la cui chiarificazione è parte importante del lavoro del giurista che vi si dedica. Indizio, attendibilità dei testimoni, rilevanza, pertinenza e così via, sono nozioni che è importante rendere perspicue, non solo nell'interesse astratto, pur legittimo, della dottrina, ma soprattutto per il possibile impatto giurisprudenziale che tale chiarificazione può recare con sé. Il linguaggio della teoria bayesiana della probabilità offre uno strumento nuovo, in taluni casi di grande importanza, come mostrerò più sotto con un esempio specifico.

b) *uso prescrittivo*. Al pari delle leggi formali della logica deduttiva, il teorema di Bayes può essere utile nella costruzione di un'argomentazione probatoria. Nell'esempio delle impronte digitali illustrato *supra*, § 2, il formalismo di per sé non aggiunge nulla a quanto fa già da sé l'intuizione comune. E del resto questo accade assai spesso con le leggi logiche, la cui esplicita menzione, alla pari delle premesse condivise in maniera non problematica, in molti contesti apparirebbe un gesto di vacua pedanteria. Ad esempio, se anziché dire: «Piove: dunque il prato è bagnato», si dicesse: «Piove. Se piove allora il prato è bagnato. Quindi, in virtù del *modus ponendo ponens*, il prato è bagnato», si farebbe senz'altro un ragionamento più rigoroso, ma la cogenza dell'argomentazione non se ne avvantaggerebbe in misura significativa. Il punto è che i nostri ragionamenti quotidiani sono quasi sempre *ellittici*. Essi, infatti, per ragioni di economia espositiva, lasciano tipicamente implicite sia alcune premesse materiali (nell'esempio precedente: «se piove il prato è bagnato») sia le regole formali che giustificano il passaggio dalle premesse alla conclusione (nel nostro esempio: il *modus ponendo ponens*). Là dove però le inferenze sono più complesse e riescono meno intuitive, si rende necessaria l'esplicitazione delle premesse e dei principi formali su cui esse si basano. Tale esplicitazione può essere utile anche per evitare *fallacie*, cioè argomentazioni in apparenza corrette, ma in realtà erronee. Le cose non cambiano se si passa alla più ampia logica dell'incerto. Accade quindi che vi siano delle situazioni nelle quali il teorema di Bayes aiuta a derivare inferenze che la sola intuizione non sarebbe in grado di trarre e altre nelle quali esso aiuta a evitare inferenze fallaci.

c) *uso descrittivo*. La logica della probabilità in generale, e il teorema di Bayes in particolare, possono essere utili per *ri-*

costruire un'argomentazione di merito, esplicitandone i principi formali che ne stanno alla base.

d) *uso dottrinale*. Attraverso un'analisi bayesiana possono giustificarsi non solo singoli argomenti particolari, ma anche massime generali, che possono codificarsi in regole sia di carattere legislativo sia di carattere giurisprudenziale.

e) *uso processuale*. Nell'ambito della dialettica delle parti, il teorema di Bayes può essere usato per criticare le tesi della parte avversa. Ad esempio, esso può riuscire utile per costruire un'argomentazione *ad hominem*, che faccia emergere come da premesse (gradi di credibilità) sostenute dalla parte avversa si possono trarre conseguenze (altri gradi di credibilità) delle quali la stessa parte avversa negherebbe di essere portatrice.

In quanto segue mi soffermerò sull'uso delucidativo del teorema di Bayes, soffermandomi sulla chiarificazione concettuale di alcune nozioni relative alle testimonianze. Non intendo, naturalmente, esaurire l'argomento, né rimpiazzare quanto è detto su questo argomento nella letteratura giuridica. Ciò che mi propongo è solamente di mostrare con un esempio concreto la fecondità del formalismo bayesiano e la sua utilità al servizio dell'analisi concettuale richiesta dal diritto delle prove.

6. Segue: *uso delucidativo. La prova testimoniale*

Quando ascolta la risposta «sì» alla domanda fattuale «è vero che *t*?» rivolta a un testimone ([11]) *X*, il giudice accerta direttamente la verità della proposizione «*X*, interrogato se la proposizione *t* sia vera, risponde positivamente». Quest'ultima proposizione, che chiamerò *i*, va accuratamente distinta da *t.* Chiedia-

---

([11]) Qui il termine 'testimonianza' è inteso in senso lato, includente cioè qualsiasi mezzo di prova costituito da dichiarazioni di merito rese da persone interrogate davanti al giudice.

moci cosa intendiamo quando diciamo che *X* in questa situazione è *attendibile* ([12]). Si sarebbe tentati di identificare l'attendibilità della testimonianza con la probabilità che *t* (la proposizione confermata dal testimone) sia vera. Questa risposta è tuttavia fallace. Se si identificasse la probabilità iniziale di *t* con l'attendibilità della deposizione di *X*, quest'ultima dipenderebbe solo dalla probabilità iniziale di *t*. Ciò renderebbe inutili le testimonianze, che verrebbero credute solo quando confermano le aspettative del giudice e respinte come inattendibili quando le smentiscono. È chiaro invece che una testimonianza è, *ceteris paribus*, tanto più informativa quanto più *inatteso* è il suo contenuto. Tuttavia, affinché una testimonianza sia utile, non basta che essa rechi un contenuto che non sia già stato sufficientemente stabilito in precedenza: bisogna anche che essa sia pertinente e *attendibile*. È evidente, quindi, che l'attendibilità è cosa diversa dalla probabilità iniziale.

In realtà, a ben riflettere, l'attendibilità della testimonianza non dipende solo dal suo contenuto *t*, ma da una *relazione* che sussiste tra le aspettative del giudice riguardo a *i* e il valore di verità di *t*. Il giudice riterrebbe la testimonianza perfettamente attendibile se, prima di interrogare *X* ([13]), avesse la certezza che *X* risponda «sì» o «no» in conformità al valore di verità di *t*, a-

([12]) Dal punto di vista del formalismo bayesiano la situazione in cui *X* dichiara *spontaneamente t* è leggermente più complessa di quella prospettata nel testo. Essa, tuttavia, conduce a considerazioni sostanzialmente equivalenti.

([13]) In realtà la valutazione dell'attendibilità può anche basarsi sul comportamento di *X durante* la deposizione. Già David Hume nel XVIII secolo osservava: «noi nutriamo un sospetto intorno a qualche questione di fatto quando gli spettatori dello stesso fatto … presentano la loro testimonianza con esitazione o, al contrario, con affermazioni troppo violente» (D. HUME, *Ricerca sull'intelletto umano* (1748), in ID., *Opere filosofiche*, vol. 2, Roma-Bari, 1987, p.119). Ciò che è essenziale è soltanto questo: l'attendibilità di una testimonianza non dipende dal suo contenuto e quindi deve poter essere valutata anche senza conoscerlo o, se lo si conosce, prescindendo da esso.

vesse cioè la certezza che *X*, in questa occasione, risponderà in modo *veridico*. Questo caso estremo, tuttavia, non sempre si presenta. Come caratterizzare, allora, i *gradi di attendibilità* che attribuiamo in genere alle diverse testimonianze? Il teorema di Bayes consente la soluzione di questo problema. Esso, applicato a questa situazione, fornisce la formula:

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{Q}(t \mid i) = \mathbf{Q}(t)\frac{\mathbf{P}(i \mid t)}{\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)}\,.$$

La formula (4), che ha, naturalmente, la stessa forma della (2), fornisce la quota finale $\mathbf{Q}(t \mid i)$ della proposizione *t* sulla base della risultanza *i* ([14]). I fattori da cui dipende tale quota finale sono, in base alla formula (4), tre: la quota iniziale $\mathbf{Q}(t)$, la probabilità $\mathbf{P}(i \mid t)$ e la probabilità $\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$. Il primo fattore è essenzialmente il medesimo costituito dalla probabilità iniziale $\mathbf{P}(t)$ che, come si è già visto, è distinto dall'attendibilità. Il valore di probabilità $\mathbf{P}(i \mid t)$ cattura certamente in parte l'idea di attendibilità della testimonianza. Ci aspettiamo, infatti, che un testimone attendibile risponda «sì» alla domanda del giudice quando questa risposta è veridica. E tanto più forte è tale aspettativa tanto maggiore sarà, *ceteris paribus*, l'attendibilità che attribuiamo alla testimonianza. Tuttavia nell'idea di attendibilità c'è anche l'aspettativa che il testimone risponda «no» quando *t* non corrisponde ai fatti. Tale aspettativa è misurata dal terzo fattore $\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$, nel senso che tanto il valore di $\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$ è *basso* tanto più *alta* è l'attendibilità della testimonianza. Sia $\mathbf{P}(i \mid t)$) sia $\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$ fanno dunque parte della nozione di attendibilità, la quale deve pertanto risultare dalla combinazione di

---

([14]) Poiché *i* coinvolge X, fornisce un'informazione che dipende *anche* da *X*. Di conseguenza, la valutazione della credibilità di *i* dipende anche da considerazioni che riguardano *X*. Cfr. *infra*, nota 16.

questi due fattori ([15]). Poiché i due fattori hanno la medesima importanza e il loro contributo all'attendibilità complessiva è opposto (nel senso che al crescere del primo l'attendibilità *aumenta*, mentre al crescere del secondo l'attendibilità *diminuisce*), la maniera più naturale di combinarli è quella di considerare come misura complessiva dell'attendibilità della testimonianza il rapporto $\mathbf{P}(i\,|\,t)/\mathbf{P}(i\,|\,\text{non } t)$, vale a dire il rapporto di Bayes di *t* rispetto a *i*. Ricordato che la probabilità di una proposizione è una misura (sia pure secondo l'opinione di un individuo, nel nostro caso il giudice) del suo grado di credibilità alla luce delle prove disponibili, il teorema di Bayes, in rapporto alle testimonianze può essere suggestivamente formulato nel seguente modo:

(5) Credibilità di t alla luce di i =
Credibilità iniziale di t $\times$ attendibilità della testimonianza

In altri termini, il grado *ex post* di credibilità della dichiarazione testimoniale è dato dal grado di credibilità *ex ante* di *t* moltiplicato per l'attendibilità della testimonianza ([16]).

([15]) A prima vista si potrebbe obiettare che manca la considerazione di altre due fattori: $\mathbf{P}(\text{non } i\,|\,t)$ e $\mathbf{P}(\text{non } i\,|\,\text{non } t)$. Il calcolo delle probabilità ci assicura tuttavia che questi due ultimi fattori sono ridondanti, perché sono determinati dagli altri due. Valgono infatti le due seguenti identità: $\mathbf{P}(\text{non } i\,|\,t) = 1 - \mathbf{P}(i\,|\,t)$ e $\mathbf{P}(\text{non } i\,|\,\text{non } t) = 1 - \mathbf{P}(i\,|\,\text{non } t)$.

([16]) Nelle discussioni giuridiche l'attendibilità è spesso attribuita al testimone. La presente analisi mostra invece che l'attendibilità riguarda la singola testimonianza pur essendo quest'ultima la testimonianza *di* un determinato testimone. In altri termini, l'attendibilità dipende non solo dal testimone ma anche dal contesto nel quale la testimonianza viene resa e dunque può variare, con il medesimo testimone, di deposizione in deposizione. Naturalmente, ove tutte le deposizioni di una persona *X* avessero il medesimo grado di attendibilità *r*, sarebbe lecito considerare *r* come una disposizione permanente di *X*. Nel caso delle testimonianze in senso stretto può trattarsi di un'assunzione il più

I due fattori $\mathbf{P}(i \mid t)$ e $\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$ che concorrono a determinare il grado d'attendibilità di una testimonianza sono logicamente indipendenti, nel senso che il valore dell'uno è, in linea di principio, compatibile con *qualsiasi* possibile valore dell'altro. Naturalmente si è propensi a valutare in modo coordinato i due fattori, nel senso che se giudichiamo attendibile la testimonianza riteniamo di solito che $\mathbf{P}(i \mid t)$ sia elevata e *contemporaneamente* $\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$ bassa. Ciò non è tuttavia logicamente necessario e possono ben darsi eccezioni. La circostanza che i fattori da prendere in considerazione siano effettivamente due consente di distinguere varie maniere con cui una testimonianza può essere attendibile o inattendibile.

7. Segue: *Analisi della nozione di testimonianza inattendibile.*

Concentriamoci ora sulla nozione di *inattendibilità* delle testimonianze alla luce del teorema di Bayes. Per semplificare la situazione, distinguerò nel *continuum* dei casi possibili i tre seguenti.

Un primo genere d'inattendibilità si ha quando si giudica elevato il valore di $\mathbf{P}(i \mid t)$, ma si ritiene allo stesso tempo elevato anche il valore di $\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$. Un secondo genere si verifica quando il valore di $\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$ è piccolo, ma è piccolo anche il

delle volte affatto ragionevole. In altri casi, invece, tale assunzione può riuscire completamente fuorviante. Si pensi, ad esempio, al caso delle chiamate di correo di un collaboratore di giustizia che usufruisse della legislazione premiale e che decidesse di mentire con le sue deposizioni ove ciò gli tornasse in qualche maniera utile, ma volesse, allo stesso tempo, conservare una reputazione di collaboratore affidabile. Un tale collaboratore potrebbe decidere di essere veridico in tutti i casi in cui le sue dichiarazioni fossero suscettibili di essere messe alla prova con riscontri, riservandosi di dichiarare eventualmente il falso nei casi in cui avesse la pratica certezza che non sarebbe possibile effettuare alcun riscontro alle sue dichiarazioni. Considerare l'attendibilità come una disposizione permanente del testimone, indipendente dal contesto della testimonianza, reca con sé il rischio di lasciarsi fuorviare da macchinazioni come questa.

valore di $\mathbf{P}(i \mid t)$. Un terzo genere si ha quando il valore di $\mathbf{P}(i \mid t)$ è piccolo in rapporto a quello di $\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$.

Nei primi due casi, supporrò, per semplicità, che valga $\mathbf{P}(i \mid t) = \mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$ ([17]). Qui la disposizione del testimone X a confermare t è *indipendente* dalla verità o falsità di t. Nel primo caso X ha un qualche interesse ad asserire che t sia vera, nel secondo caso X ha un qualche interesse ad asserire che t sia falsa. In entrambi i casi tale interesse sussiste *a prescindere dall'effettivo valore di verità di* t. Caratteristica di queste due situazioni è che l'inattendibilità si riflette nella *irrilevanza probabilistica*: poiché $\mathbf{P}(i \mid t)/\mathbf{P}(i \mid \text{non } t) = 1$, la probabilità finale $\mathbf{P}(t \mid i)$ coincide con la credibilità iniziale $\mathbf{P}(t)$. Nel terzo caso, invece, nel quale $\mathbf{P}(i \mid t)/\mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$ è molto minore di 1 ([18]), si hanno ragioni per credere che il teste, nell'asserire o negare che t è vera, menta comunque. Ne consegue, in base al teorema di Bayes, che la testimonianza è probabilisticamente *rilevante*, perché avvalora la negazione di ciò che il teste dichiara. Siffatta testimonianza, quindi, non andrebbe esclusa dalla lista delle prove di cui tener conto. Va osservato, tuttavia, che questa terza possibilità (la quale postula una irrealistica attrazione del teste verso la menzogna in quanto tale) è una mera possibilità logica di scarso rilievo pratico ([19]).

([17]) Naturalmente, se l'eguaglianza non è soddisfatta in modo esatto ma tuttavia vale $\mathbf{P}(i \mid t) \cong \mathbf{P}(i \mid \text{non } t)$, le considerazioni che faremo continuano a valere, sia pure in maniera approssimativa.

([18]) Si rammenti che, per quanto osservato *supra*, nota 15, la presente formula contempla anche l'eventualità che il teste, mentendo, neghi *t*.

([19]) È importante non confondere l'attendibilità con la *veridicità* né l'inattendibilità con la *falsità*. Una risposta è veridica quando il teste conferma o nega t se e solo se, rispettivamente, t è vera oppure falsa. Con l'aiuto del simbolismo matematico si potrebbe mostrare che, come del resto risulta intuitivo, la probabilità di veridicità (a differenza di quanto emerge per l'attendibilità dalla precedente formula 5) dipende, oltre che da $\mathbf{P}(i \mid t)$, anche dalla probabilità iniziale $\mathbf{P}(t)$.

Affrontiamo ora il problema di quale significato attribuire al valore della probabilità iniziale $\mathbf{P}(t)$ (o alla corrispondente quota $\mathbf{Q}(t)$) nell'ipotesi che non siano state acquisite in precedenza altre prove che riguardano t ([20]). La risposta è che essa corrisponde alla nozione di *verosimiglianza probatoria* ([21]). È chiaro che la verosimiglianza probatoria di una qualunque asserzione deve essere maggiore di 0 perché tale asserzione possa essere presa in considerazione. Infatti se $\mathbf{P}(t)=0$ anche la probabilità finale è pari a 0, qualunque prova si adduca a suo favore, la quale quindi risulta irrilevante. In particolare ciò vale per le prove testimoniali. Analogamente, se $\mathbf{P}(t)=1$ anche la probabilità finale $\mathbf{P}(t\,|\,i)$ è pari a 1, sì che anche in questo caso la testimonianza i è irrilevante.

L'unico caso interessante è quindi quello in cui $0<\mathbf{P}(t)<1$. In questo caso il teorema di Bayes implica quanto segue: (a) con un opportuno valore di attendibilità $\mathbf{P}(i\,|\,t)/\mathbf{P}(i\,|\,\text{non } t)$ la probabilità finale $\mathbf{P}(t\,|\,i)$ può essere vicina a 1 (cioè alla certezza morale) quanto si vuole, per quanto inverosimile l'ipotesi da provare fosse inizialmente; (b) a parità di attendibilità le testimonianze inizialmente più verosimili hanno probabilità finale maggiore di esser vere. La proprietà (a) esclude che il teorema di Bayes imponga di essere *prevenuti* nei confronti di testimonianze a sostegno di fatti poco verosimili. E se l'attendibilità della testimonianza è molto alta (nel senso che $\mathbf{P}(i\,|\,t)\cong 1$ e $\mathbf{P}(i\,|\,\text{non } t)\cong 0$), la bassa verosimiglianza iniziale viene soverchiata dalla testi-

---

([20]) Se sono state acquisite altre prove, naturalmente esse andrebbero combinate con quelle della testimonianza. La combinazione si può ottenere in modo naturale iterando il teorema di Bayes, secondo quanto si è spiegato *supra*, § 4.

([21]) Cfr. G. UBERTIS, *La prova penale*, Torino, 1995, p. 58-62. La verosimiglianza probatoria non va confusa con la verosimiglianza statistica (*likelihood*), la quale corrisponde a ciò che *supra*, § 4, si è chiamato *rapporto di Bayes*.

monianza, in quanto la probabilità finale in pratica non ne dipende. Il punto (b) mostra tuttavia che quando l'attendibilità delle testimonianze di *X* non è elevatissima, un fatto in sé alquanto verosimile riferito da *X* ha una credibilità finale maggiore di un fatto poco verosimile riferito dal medesimo *X*. Ciò può destare perplessità in chi volesse che la valutazione finale dipendesse in tutti i casi dalle sole prove o che la credibilità delle deposizioni di un teste fosse giudicata la medesima per tutte le sue affermazioni. In realtà, queste perplessità derivano dalla tendenza a confondere l'*attendibilità* (che può ben assumersi uguale per tutte le affermazioni del teste, cfr. *supra*, nota 16) con la probabilità finale (o *credibilità*) delle singole affermazioni, che invece dipende anche dalla verosimiglianza di queste ultime (salvo che il teste non sia giudicato perfettamente attendibile o quasi).

Un semplice esempio ([22]) illustra la ragionevolezza del punto (b). Supponiamo che un testimone *X*, le cui testimonianze reputiamo parimenti (ma moderatamente) attendibili, riferisca che un esperto tedesco di musica del XVIII secolo è stato in grado di decidere dall'ascolto di ciascuno dei cinquanta brani che gli sono fatti ascoltare se esso era di Haydn oppure di Mozart. In questo caso non abbiamo motivo di dubitare della deposizione di *X*, che conferma la grande competenza di quel musicologo tedesco. Supponiamo ora che il medesimo teste *X* asserisca di aver visto un "veggente" indovinare, mediante la lettura delle carte, cinquanta volte di seguito l'esito del lancio di una moneta scelta e lanciata da *X* stesso. In questo caso una persona di buon senso nutrirebbe dubbi sulla veridicità della testimonianza, anche se si assumesse che il rapporto di Bayes fosse identico nei due casi ([23]).

([22]) Si tratta di un adattamento di un analogo esempio dovuto a L. J. Savage (L. J. SAVAGE, *La probabilità soggettiva nei problemi pratici della statistica*, Roma, 1959, p. 11-13).

([23]) Va da sé che il rapporto di Bayes è relativo a queste specifiche testimonianze ed è valutato *ex ante*. Il fatto che *X* abbia reso davanti al giudice una testimonianza alla fine giudicata probabilmente falsa, rende eventuali future te-

La differenza sta nella verosimiglianza del fatto testimoniato: è verosimile che un esperto di musica settecentesca sappia distinguere un brano di Mozart da un brano di Haydn; è invece assai inverosimile (sebbene non del tutto assurdo) che il preteso veggente possa indovinare il risultato di cinquanta lanci consecutivi di una moneta. In base alla nostra conoscenza di sfondo (da cui in ultima analisi dipende la verosimiglianza probatoria), se il musicologo individua correttamente l'autore di un brano ciò è dovuto alla sua competenza musicale; se il preteso veggente indovina l'esito del lancio di una moneta ciò è presumibilmente dovuto al caso. Il fatto che il teorema di Bayes consenta di catturare questa differenza è, come si vede da questo esempio, non solo in perfetto accordo con l'intuizione, ma un punto di forza rispetto ad altre impostazioni che vorrebbero mettere da parte le probabilità iniziali.

8. *Conclusione*

Emerge da quanto illustrato in questo articolo che la dottrina delle prove può avvalersi in maniera feconda del calcolo delle probabilità e del teorema di Bayes in particolare.

Tuttavia, tale calcolo non è che uno strumento formale (*organon*), il ricorso al quale non richiede di mettere da parte quanto raggiunto dalla dottrina e dalla giurisprudenza senza di esso. Né si tratta di matematizzare a tutti i costi il diritto delle prove: vi sono questioni che non si prestano a una analisi matematica e che pertanto non possono certo giovarsi dell'aiuto offerto dal teorema di Bayes. Vi sono però altre questioni che traggono beneficio sostanziale dallo strumento matematico. Il quale mette a disposizione del giurista un raffinato e potente formalismo, con il quale molte intuizioni e osservazioni, in linea di principio raggiungibili anche per altra via, possono essere delucidate e unificate mediante un modello formale assai semplice. Del resto,

---

stimonianze di X meno attendibili. Secondo l'impostazione bayesiana, i (a differenza di t) fa sempre parte delle prove praticamente accertate di cui si deve tener conto in seguito.

come ha scritto il matematico Bruno de Finetti, uno dei padri fondatori del bayesianesimo contemporaneo, «la matematica ha interesse in quanto strumento atto a condensare dei concetti che anche di per sé, senza la matematica, sarebbero quelli che sono» (24).

(24) B. DE FINETTI, *Filosofia della probabilità*, a cura di A. Mura, Milano, 1995, p. 61.